Correction du DST n°2

Exercice 1

1. On raisonne par récurrence double.
   u_0 et u_1 sont définis et tous deux strictement positifs.
   Supposons que pour un certain rang n, u_n et u_{n+1} soient tous deux définis et strictement positifs. Alors
   $$u_{n+2} = \frac{u_n^3}{\sqrt{u_{n+1}}}$$
   est bien défini et strictement positif, donc la propriété est vraie pour le rang $n+2$. Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et et $u_n > 0$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ donc $\ln(u_n)$ est bien défini.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = \ln(u_{n+2}) = \ln\left(\frac{u_n^3}{\sqrt{u_{n+1}}}\right) = 3\ln(u_n) - \frac{1}{2}\ln(u_{n+1}) = -\frac{1}{2}v_{n+1} + 3v_n$.
4. On déduit de la question précédente que (v_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est : $r^2 = -\frac{1}{2}r + 3$. Elle admet deux solutions réelles : -2 et $\frac{3}{2}$ donc d'après le cours il existe deux réels λ et μ tels que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \lambda \times (-2)^n + \mu \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$$
   Comme $v_0 = \ln(u_0) = 0$ et $v_1 = \ln(u_1) = 1$, on a :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu & = & 0 \\ -2\lambda + \frac{3}{2}\mu & = & 1 \end{array}\right.$$
   d'où $\lambda = -\frac{2}{7}$ et $\mu = \frac{2}{7}$ et ainsi :
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = -\frac{2}{7} \times (-2)^n + \frac{2}{7} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n}$$
   Puisque $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \mathrm{e}^{-2\times(-2)^n/7} \times \mathrm{e}^{2\times(3/2)^n/7}$$
   donc en posant $A = \mathrm{e}^{-2/7}$, $B = \mathrm{e}^{2/7}$ et $r_1 = -2$, $r_2 = \frac{3}{2}$ on a bien :
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A^{r_1^n} \times B^{r_2^n}}$$

Exercice 2

1. Soit $p \geq 0$ un entier fixé, notons pour tout $n \geq p$, $\mathcal{P}(n)$: $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
   - **Initialisation :** Pour $n = p$ on d'une part :
     $$\sum_{k=p}^{p} \binom{k}{p} = \binom{p}{p} = 1$$
     et d'autre part :
     $$\binom{n+1}{p+1} = \binom{p+1}{p+1} = 1$$
     donc $\mathcal{P}(p)$ est vraie.

- **Hérédité :** Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} &= \binom{n+1}{p} + \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} \\
&= \binom{n+1}{p} + \binom{n+1}{p+1} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \binom{n+2}{p+1} && \text{d'après la formule de Pascal}
\end{aligned}$$

  donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \geq p$ on a $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Ce raisonnement étant valable quel que soit $p \in \mathbb{N}$, le résultat est vrai pour tout entier $p \geq 0$ et tout entier $n \geq p$.

2. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{3k+1}}{2^{2k}} &= x \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x^3}{4}\right)^k \\
&= x \times \frac{\left(\frac{x^3}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{x^3}{4} - 1} \\
&= x \frac{x^{3n+3} - 4^{n+1}}{4^n x - 4^{n+1}} p && \boxed{= \frac{x^{3n+4} - 4^{n+1} x}{4^n x^3 - 4^{n+1}}}
\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (3k-2)^2 &= \sum_{k=0}^{n} (9k^2 - 12k + 4) \\
&= 9 \sum_{k=0}^{n} k^2 - 12 \sum_{k=0}^{n} k + 4 \sum_{k=0}^{n} 1 \\
&= 9 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 12 \frac{n(n+1)}{2} + 4(n+1) \\
&= \frac{3n(n+1)(2n+1) - 12n(n+1) + 8(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(3n(2n+1) - 12n + 8)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(6n^2 - 9n + 8)}{2}
\end{aligned}$$

4. (a) Soit $k \in \{1, ..., n\}$. Alors :

$$\begin{aligned}
k \times \binom{n}{k} &= k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} && \text{car } k \neq 0 \\
&= n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&\boxed{= n \times \binom{n-1}{k-1}}
\end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= np\sum_{k'=0}^{n-1}\binom{n-1}{k'}p^{k'-1}(1-p)^{n-1-k'} \\
&= np(p+(1-p))^{n-1} && \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\
&\boxed{= np}
\end{aligned}$$

Exercice 3

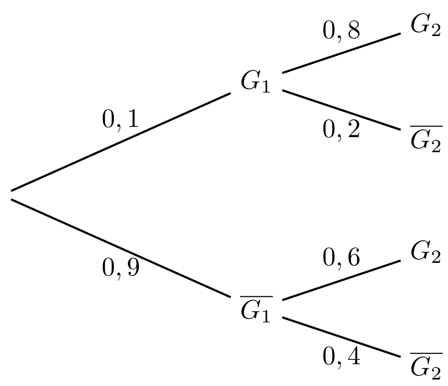
1. $A+B=\{-1,2,3,6\}$
2. Montrons que $A+B=]-1,6]$:
   Si $x\in A+B$, alors il existe $a\in A$ et $b\in B$ tels que $x=a+b$. Comme $-2\le a\le 2$ et $1<b\le 4$ on a $-1<a+b\le 6$ par somme d'inégalités, donc $x\in]-1,6]$. On a montré que $A+B\subset]-1,6]$.
   Réciproquement, si $x\in]-1,6]$, on distingue trois cas :
   - Si $x\in]1,4]$, on peut poser $a=0\in A$ et $b=x\in B$ de sorte que $x=a+b$ donc $x\in A+B$.
   - Si $x\in]-1,1]$, alors en posant $a=-2$ et $b=x+2$ on a $a\in A$ et $b\in B$ et $x=a+b$ donc $x\in A+B$.
   - Si $x\in]4,6]$, alors en posant $a=2$ et $b=x-2$ on a $a\in A$ et $b\in B$ et $x=a+b$ donc $x\in A+B$.

   on a donc montré que $]-1,6]\subset A+B$.
   Ainsi on a bien $A+B=]-1,6]$.
3. Soit $x\in A+\mathbb{R}$, alors $x\in\mathbb{R}$ par définition (pour tout $A,B\subset\mathbb{R}$, $A+B\subset\mathbb{R}$).
   Réciproquement : soit $x\in\mathbb{R}$ et soit $a\in A$ (qui existe car $A\neq\varnothing$), alors $x=a+x-a$ avec $a\in A$ et $x-a\in\mathbb{R}$, donc $x\in A+\mathbb{R}$.
   On a donc montré par double inclusion que $A+\mathbb{R}=\mathbb{R}$
4. Soit $x\in A+B$. Il existe $a\in A$ et $b\in B$ tels que $x=a+b$, mais par inclusion $a\in C$ et $b\in D$ donc $x\in C+D$. Ainsi $A+B\subset C+D$.
5. Si $x\in(A+C)\cup(B+C)$, alors $x=a+c$ ou $x=b+c$ avec $(a,b,c)\in A\times B\times C$.
   - Si $x=a+c$, comme $a\in A$ on a $a\in A\cup B$ donc $x\in(A\cup B)+C$.
   - Si $x=b+c$, comme $b\in B$ on a $b\in A\cup B$ donc $x\in(A\cup B)+C$

   dans tous les cas $x\in(A\cup B)+C$.
   Réciproquement, si $x\in(A\cup B)+C$ on a $x=y+c$ avec $y\in A\cup B$. Si $y\in A$, alors $x\in A+C$ et si $y\in B$ on a $x\in B+C$, donc dans tous les cas $x\in(A+C)\cup(B+C)$.
   Par double inclusion : $(A+C)\cup(B+C)=(A\cup B)+C$
6. (a) $\sup A$ est un majorant de A et $\sup B$ un majorant de B. Si $x\in A+B$, alors $x=a+b$ avec $a\in A$ et $b\in B$, donc $a\le\sup A$ et $b\le\sup B$, d'où $x\le\sup A+\sup B$. Ainsi $\sup A+\sup B$ est un majorant de $A+B$.
   (b) On a déjà montré que $\sup A+\sup B$ est un majorant de $A+B$. Il faut montrer que $\sup A+\sup B$ est le plus petit des majorants de $A+B$. Soit $m<\sup A+\sup B$, montrons qu'il existe $x\in A+B$ tel que $m<x$. On a $m-\sup B<\sup A$ donc il existe $a\in A$ tel que $m-\sup B<a$. On a ensuite $m-a<\sup B$ donc il existe $b\in B$ tel que $m-a<b$, d'où $m<a+b$ avec $a+b\in A+B$. Ainsi on a bien $\sup A+\sup B=\sup(A+B)$.
7. (a) Soit $y\in f(A+B)$. Alors il existe $x=a+b\in A+B$ tel que $y=f(x)=f(a)+f(b)$ par hypothèse sur f.
   Comme $f(a)\in f(A)$ et $f(b)\in f(B)$, on a bien $y\in f(A)+f(B)$.
   Réciproquement, si $y\in f(A)+f(B)$, il existe $a\in A$ et $b\in B$ tel que $y=f(a)+f(b)=f(a+b)$ donc $y\in f(A+B)$.
   Par double inclusion : $f(A+B)=f(A)+f(B)$.
   (b) Si $x\in f^{-1}(A)+f^{-1}(B)$, alors $x=a+b$ avec $a\in f^{-1}(A)$ et $b\in f^{-1}(B)$ donc $f(x)=f(a)+f(b)$ avec $f(a)\in A$ et $f(b)\in B$ donc $f(x)\in A+B$ donc $x\in f^{-1}(A+B)$. Ainsi $f^{-1}(A)+f^{-1}(B)\subset f^{-1}(A+B)$.

Exercice 4

1. On peut représenter la situation par l'arbre de probabilité suivant :



donc

$$\begin{aligned}
p_2 &= \mathbb{P}(G_2) \\
&= \mathbb{P}(G_1 \cap G_2) + \mathbb{P}(\overline{G_1} \cap G_2) && \text{(formule des probabilités totales)} \\
&= \mathbb{P}(G_1) \times \mathbb{P}(G_2|G_1) + \mathbb{P}(\overline{G_1}) \times \mathbb{P}(G_2|\overline{G_1}) \\
&= 0,1 \times 0,8 + 0,9 \times 0,6 && = \frac{1}{10} \times \frac{4}{5} + \frac{9}{10} \times \frac{3}{5} \\
&= \frac{4+27}{50} \\
&= \frac{31}{50}
\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{G_1}|G_2) &= \frac{\mathbb{P}(\overline{G_1} \cap G_2)}{\mathbb{P}(G_2)} \\
&= \frac{\frac{9}{10} \times \frac{3}{5}}{\frac{31}{50}} \\
&= \frac{27}{31}
\end{aligned}$$

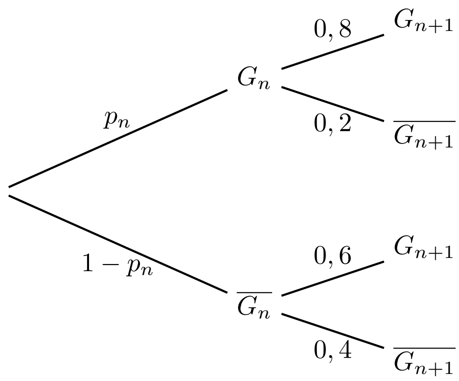
La probabilité qu'il ait raté le premier lancer sachant qu'il a marqué le deuxième est $\frac{27}{31}$.

3. Cherchons la probabilité de l'événement contraire, c'est à dire la probabilité que le joueur ne marque aucun panier sur les trois premiers lancers :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3}) &= \mathbb{P}(\overline{G_1}) \times \mathbb{P}(\overline{G_2}|\overline{G_1}) \times \mathbb{P}(\overline{G_3}|G_1 \cap G_2) && \text{(formule des probabilités composées)} \\
&= 0,9 \times 0,4 \times 0,4 \\
&= \frac{9}{10} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \\
&= \frac{36}{250} \\
&= \frac{18}{125}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{donc la probabilité qu'il marque au moins un panier est } 1 - \frac{18}{125} = \frac{107}{125}}$$

4. On représente la situation par un arbre. Pour tout entier $n \geq 1$ on a :



On a donc

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= \mathbb{P}(G_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}(G_n) \times \mathbb{P}(G_{n+1}|G_n) + \mathbb{P}(\overline{G_n}) \times \mathbb{P}(G_{n+1}|G_n) \\
&= p_n \times 0,8 + (1-p_n) \times 0,6 \\
&= \frac{4}{5}p_n + \frac{3}{5} - \frac{3}{5}p_n \\
&\boxed{= \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}}
\end{aligned}$$

5. Soit $a \in \mathbb{R}$, posons $u_n = p_n - a$. Alors

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1} - a \\
&= \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5} - a \\
&= \frac{1}{5}u_n + \frac{1}{5}a + \frac{3}{5} - a \\
&= \frac{1}{5}u_n + \frac{3}{5} - \frac{4}{5}a
\end{aligned}$$

ainsi, (u_n) est une suite géométrique si et seulement si $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}a = 0$, si et seulement si $a = \frac{3}{4}$.

6. La suite (u_n) définie par $u_n = p_n - \frac{3}{4}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ d'après la question précédente. On a donc pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_n = u_1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(0,1 - \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = -\frac{13}{20} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

et donc

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{20} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}$$

7. Comme $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{3}{4}$.

Exercice 5

Partie I

1. (a) On a pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f_n(x)-(nx-2) &= \frac{-2\,\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}+2 \\ &= \frac{-2}{\mathrm{e}^{-x}+1}+2 \end{aligned}$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{\mathrm{e}^{-x}+1} = -2$ par opérations usuelles donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_n(x)-(nx-2)) = 0$, la droite d'équation $y = nx-2$ est bien asymptote à $\mathcal{C}_n$ en $+\infty$.

(b) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2\,\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 0$ par opérations usuelles, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(f_n(x)-nx) = 0$. On en déduit que la droite d'équation $y = nx$ est asymptote à $\mathcal{C}_n$ en $-\infty$.

2. (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+\mathrm{e}^x \geq 1 > 0$ donc ne s'annule pas, et les fonctions $x \mapsto 2\,\mathrm{e}^x$ et $x \mapsto 1+\mathrm{e}^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Enfin la fonction $x \mapsto nx$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par opérations f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.

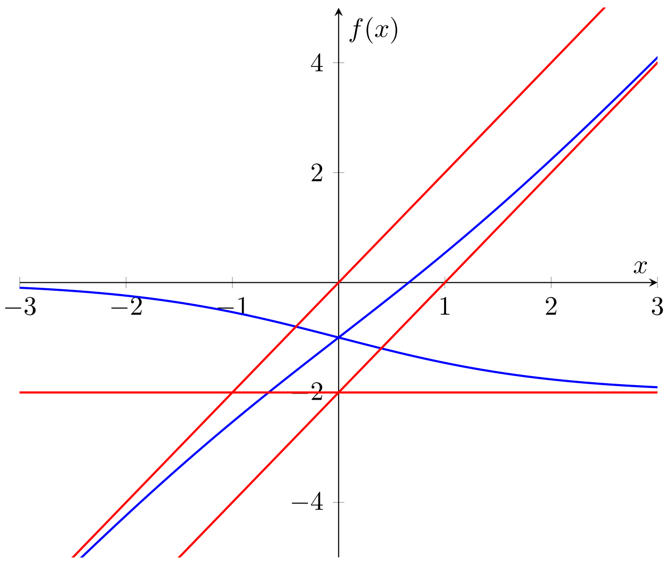
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) &= n - \frac{2\,\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)-2(\mathrm{e}^x)^2}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \\ &= n - \frac{2\,\mathrm{e}^x+2\,\mathrm{e}^{2x}-2\,\mathrm{e}^{2x}}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \\ &\boxed{= n - \frac{2\,\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}} \end{aligned}$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(1-\mathrm{e}^x)^2 \geq 0$ donc $1-2\,\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x} \geq 0$ donc $1+2\,\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x} \geq 4\,\mathrm{e}^x$ donc $(1+\mathrm{e}^x)^2 \geq 4\,\mathrm{e}^x$ d'où, comme $(1+\mathrm{e}^x)^2 > 0$:

$$\frac{4\,\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \leq 1$$

(c) Si $n = 0$, alors on a immédiatement $f_n'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc f_n est strictement décroissante.
Si $n \geq 1$, alors $\dfrac{2\,\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \leq \dfrac{1}{2} < n$ d'après la question précédente donc $f_n'(x) > 0$ et f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(d) La tangente à $\mathcal{C}_n$ au point I d'abscisse 0 a pour équation $y = f_n'(0)(x-0)+f_n(0)$.
$f_n(0) = -1$ et $f_n'(0) = n - \frac{1}{2}$ donc la tangente a pour équation $y = (n-\frac{1}{2})x - 1$

(e) 

Partie I

3. Posons $g(x) = f_0(x) - x$. g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions strictement décroissantes, et $\lim\limits_{x\to-\infty} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ (car f_0 a une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$ d'après la partie I).

Enfin, g est continue comme somme de fonctions dérivables donc continues. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$, c'est donc l'unique réel vérifiant $f_0(\alpha) = \alpha$.
Puisque $g(0) = f_0(0) = -1 < 0$, et que g est décroissante, on a $\alpha \leq 0$

4. (a) Posons $\varphi(h) = h\,\mathrm{e}^h + h - 2\,\mathrm{e}^h + 2$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables, et

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(h) = h\,\mathrm{e}^h + \mathrm{e}^h + 1 - 2\,\mathrm{e}^h = h\,\mathrm{e}^h + 1 - \mathrm{e}^h$$

φ' est encore dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad \varphi''(h) = \mathrm{e}^h + h\,\mathrm{e}^h - \mathrm{e}^h = h\,\mathrm{e}^h$$

donc φ'' est du signe de h :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
φ''		$-$	0	$+$	
φ'		$\searrow$	0	$\nearrow$	
φ'		$+$	0	$+$	

donc φ est croissante sur $\mathbb{R}$, et comme $\varphi(0) = 0$ on en déduit que $\forall h > 0$, $\varphi(h) \geq 0$ donc

$$h(\mathrm{e}^h + 1) - 2(\mathrm{e}^h - 1) \geq 0$$

d'où

$$\frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} \leq \frac{\mathrm{e}^h + 1}{2}$$

car $h > 0$.

(b) Comme $\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y}{x - y} = \dfrac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x}{y - x}$, on peut supposer sans perte de généralité que $x > y$. Alors

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y}{x - y}\right| &= \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y}{x - y} \\
&= \mathrm{e}^y\,\frac{\mathrm{e}^{x-y} - 1}{x - y} \\
&\leq \mathrm{e}^y\,\frac{\mathrm{e}^{x-y} + 1}{2} && \text{d'après l'inégalité précédente et car } \mathrm{e}^y > 0 \\
&\leq \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y}{2}
\end{aligned}$$

(c) On a :

$$\begin{aligned}
(1 + \mathrm{e}^x)(1 + \mathrm{e}^y) \geq 2(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y) &\iff 1 + \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{x+y} \geq 2\,\mathrm{e}^x + 2e^y \\
&\iff 1 - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{x+y} \geq 0 \\
&\iff (1 - \mathrm{e}^x)(1 - \mathrm{e}^y) \geq 0 \\
&\iff (1 - \mathrm{e}^x) \text{ et } (1 - \mathrm{e}^y) \text{ sont de mêmes signes} \\
&\iff x \text{ et } y \text{ sont de même signe}
\end{aligned}$$

car $1 - \mathrm{e}^x$ a un signe opposé à x.

(d) Soient x et y de même signe, on a :

$$\begin{aligned}|f_0(x)-f_0(y)| &= \left|\frac{2\,\mathrm{e}^y}{1+\mathrm{e}^y}-\frac{2\,\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right| \\ &= \left|\frac{2\,\mathrm{e}^y(1+\mathrm{e}^x)-2\,\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^y)}{(1+\mathrm{e}^x)(1+\mathrm{e}^y)}\right| \\ &= \left|\frac{2(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)(1+\mathrm{e}^y)}\right|\end{aligned}$$

Or en combinant les deux inégalités précédentes on obtient :

$$\left|\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y}{x-y}\right| \leq \frac{1}{4}(1+\mathrm{e}^x)(1+\mathrm{e}^y)$$

donc

$$\left|\frac{2(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y)}{(1+\mathrm{e}^x)(1+\mathrm{e}^y)}\right| \leq \frac{1}{2}|x-y|$$

d'où le résultat voulu.

(e) $u_0 \leq 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f_0(u_n)$ avec f_0 une fonction à valeur négative, donc $u_n \leq 0$ pour tout entier naturel n.

(f) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} = f_0(u_n)$ et $\alpha = f(\alpha)$, on peut donc écrire :

$$|u_{n+1}-\alpha| = |f(u_n)-f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$$

d'après la question 6.d

(g) Pour $n=0$ on a $|u_0-\alpha| = |-\alpha| = |\alpha|$, et $\left(\frac{1}{2}\right)^0|\alpha| = |\alpha|$. L'inégalité est donc vraie au rang $n=0$

Supposons qu'on ait $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n|\alpha|$ pour un certain entier n, alors d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}|u_{n+1}-\alpha| &\leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha \\ &\leq \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n|\alpha| \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|\alpha|\end{aligned}$$

donc l'inégalité est vraie au rang $n+1$.

L'inégalité est vraie pour $n=0$ et la propriété est héréditaire donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n|\alpha|$.

(h) Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n|\alpha| = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-\alpha| = 0$ par encadrement. On en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n = \alpha$.

Partie III

5. (a) f_n est strictement croissante d'après la partie I, et $\lim\limits_{x\to-\infty}f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x) = +\infty$. Enfin f_n est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel x_n tel que $f_n(x_n) = 0$.

(b) $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = n - \frac{2\,\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}$ D'après l'énoncé, $\frac{-2\,\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}} > -1,47$ donc $n - \frac{2\,\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}} > n-1,47$ et comme $n \geq 2$ on a $f_n(1) > 0,53 > 0$, donc f_n s'annule entre 0 et 1 et donc $0 < x_n < 1$.

6. (a) Soit $n \geq 2$. On a $f_{n+1}(x_n) = (n+1)x_n - \dfrac{2\,\mathrm{e}^{x_n}}{1+\mathrm{e}^{x_n}} = x_n + nx_n - \dfrac{2\,\mathrm{e}^{x_n}}{1+\mathrm{e}^{x_n}} = x_n + f_n(x_n)$. Or $f_n(x_n) = 0$ donc $f_{n+1}(x_n) = x_n > 0$.

   (b) Comme $f_{n+1}(0) = -1$ et $f_{n+1}(x_n) > 0$, on en déduit que f_{n+1} s'annule entre 0 et x_n exclus donc $0 < x_{n+1} < x_n$, et ce quel que soit l'entier $n \geq 2$. (x_n) est donc strictement décroissante.

   (c) (x_n) est décroissante et minorée par 0 donc converge vers un réel ℓ.

7. (a) Pour tout $n \geq 2$ on a $f_n(x_n) = 0$ donc

$$nx_n - \frac{2\,\mathrm{e}^{x_n}}{1+\mathrm{e}^{x_n}} = 0$$

   d'où $nx_n = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{x_n}}{1+\mathrm{e}^{x_n}}$. Or, par décroissance stricte de f_0, on a

$$f_0(0) > f_0(x_n) > f_0(1)$$

   donc

$$-1 > \frac{-2\,\mathrm{e}^{x_n}}{1+\mathrm{e}^{x_n}} > \frac{-2\,\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}$$

   donc

$$1 < \frac{2\,\mathrm{e}^{x_n}}{1+\mathrm{e}^{x_n}} < \frac{2\,\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}$$

   d'où l'encadrement voulu en divisant par n :

$$\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n}\frac{2\,\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}$$

   (b) Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2\,\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}\right) = 0$, on a par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

   Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nx_n = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{x_n}}{1+\mathrm{e}^{x_n}}$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, on obtient en passant à la limite et par continuité de $x \mapsto \dfrac{2\,\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nx_n = \frac{2\,\mathrm{e}^{0}}{1+\mathrm{e}^{0}} = 1$. Ainsi $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.